第 33 講　総合問題(1)

1　a は $a>-\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とし，$f(x)=x^2-2ax$ とおく．

(1)　2 次関数　$y=f(x)$　のグラフの頂点の座標を求めよ．

(2)　2 次不等式　$f(x)\geqq x$　を解け．

(3)　x が $f(x)\geqq x$　を満たす範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上の3点 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(0,\ 6)$ を頂点とする三角形と4点 $(0,\ t)$, $(0,\ t-4)$, $(4,\ t-4)$, $(4,\ t)$ を頂点とする正方形の共通部分の面積を $S(t)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$S(2)$ と $S(6)$ の値を求めよ．

(2)　$S(t)$ を最大にする t の値と，$S(t)$ の最大値 M を求めよ．

(3)　$2 \leqq t \leqq 5$ のとき，$S(t)=S(t+1)$ を満たす t の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 x, y について，関係式 $x^2+xy+y^2=3$ が成り立つとする．

(1)　$x+y=s$, $xy=t$ とおくとき，t を s の式で表せ．

(2)　s のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　$x^2+y^2+x+y=k$ とおくとき，k を s の式で表せ．

(4)　k のとり得る値の最大値 M と最小値 m を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　総合問題(1)

等式　$x^2-xy+y^2=2$ を満たす実数 x，y について，次の問いに答えよ．

(1)　$p=x+y$，$q=xy$ とおくとき，$q=\dfrac{p^2-\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$　である．

(2)　p のとり得る値の範囲は　$-\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\leqq p\leqq\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$　である．

(3)　$2x+2y+3xy$ は p を用いて　$p^2+\boxed{\text{オ}}p-\boxed{\text{カ}}$ と表せる．よって

$2x+2y+3xy$ の最大値は $\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$，最小値は　$-\boxed{\text{コ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講　総合問題(1)

1　a は $a>-\frac{1}{2}$ を満たす実数とし，$f(x)=x^2-2ax$ とおく．

(1)　2次関数　$y=f(x)$　のグラフの頂点の座標を求めよ．

(2)　2次不等式　$f(x)\geqq x$　を解け．

(3)　x が $f(x)\geqq x$　を満たす範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

$f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2=x(x-2a)$　$\left(a>-\frac{1}{2}\right)$

(1)　グラフの頂点は　$\boldsymbol{(a,\ -a^2)}$

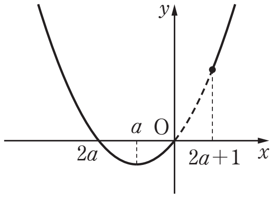
(2)　$f(x)\geqq x$ より　$x^2-2ax\geqq x$　　$x^2-(2a+1)x\geqq 0$　　$x\{x-(2a+1)\}\geqq 0$

$a>-\frac{1}{2}$ より　$2a+1>0$　　よって　$\boldsymbol{x\leqq 0,\ 2a+1\leqq x}$　……①

(3)　(i)　$-\frac{1}{2}<a<0$ のとき

$0<2a+1$ より，①における $y=f(x)$ のグラフは右図．

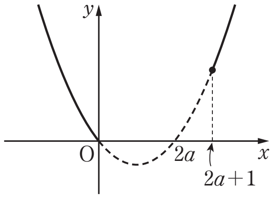
よって最小値は　$f(a)=-a^2$



(ii)　$0\leqq a$ のとき

①における $y=f(x)$ のグラフは右図．

よって最小値は　$f(0)=0$



以上より　求める最小値は　$-\frac{1}{2}<a<0$ のとき $\boldsymbol{-a^2}$　　$0\leqq a$ のとき **0**

2　座標平面上の3点 (0, 0), (6, 0), (0, 6) を頂点とする三角形と4点 $(0,\ t)$, $(0,\ t-4)$, $(4,\ t-4)$, $(4,\ t)$ を頂点とする正方形の共通部分の面積を $S(t)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$S(2)$ と $S(6)$ の値を求めよ．

(2)　$S(t)$ を最大にする t の値と，$S(t)$ の最大値 M を求めよ．

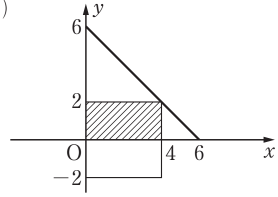
(3)　$2\leqq t\leqq 5$ のとき，$S(t)=S(t+1)$ を満たす t の値を求めよ．

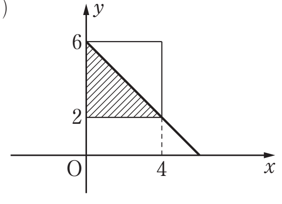
(1)　$t=2$ のとき　共通部分は図(i)

よって　$S(2)=4\cdot 2=\boldsymbol{8}$

$t=6$ のとき　共通部分は図(ii)

よって　$S(6)=4\cdot 4\cdot \frac{1}{2}=\boldsymbol{8}$

(i)


(ii)


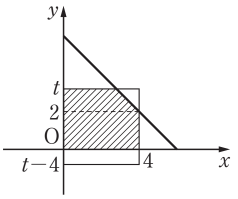
(2)　$t\leqq 0$, $10\leqq t$ のとき　$S(t)=0$

$0<t<2$ のとき　$S(t)$ は単調増加　　$6<t<10$ のとき　$S(t)$ は単調減少

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$2 \leqq t \leqq 4$ のとき　共通部分は右図斜線部分

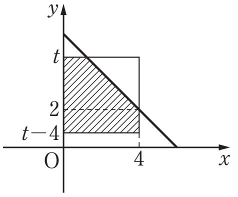


$S(t)=$(長方形)$-$(直角二等辺三角形)

$=4\cdot t-\dfrac{1}{2}(t-2)^2$

$=-\dfrac{1}{2}t^2+6t-2=-\dfrac{1}{2}(t-6)^2+16$

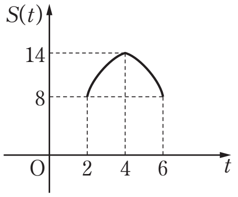
$4<t \leqq 6$ のとき　共通部分は右図斜線部分



$S(t)=$(正方形)$-$(直角二等辺三角形)

$=16-\dfrac{1}{2}(t-2)^2$

よって $2 \leqq t \leqq 6$ における $y=S(t)$ のグラフは右図.



したがって，求める最大値は　$M=S(4)=\mathbf{14}$

(3)　(2)より　$2 \leqq t \leqq 5$ において $S(t)=S(t+1)$ となるのは

$-\dfrac{1}{2}(t-6)^2+16=16-\dfrac{1}{2}\{(t+1)-2\}^2$

$(t-6)^2-(t-1)^2=0$　　よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{7}{2}}$

3　実数 x，y について，関係式 $x^2+xy+y^2=3$ が成り立つとする.

(1)　$x+y=s$，$xy=t$ とおくとき，t を s の式で表せ.

(2)　s のとり得る値の範囲を求めよ.

(3)　$x^2+y^2+x+y=k$ とおくとき，k を s の式で表せ.

(4)　k のとり得る値の最大値 M と最小値 m を求めよ.

---

(1)　$x+y=s$，$xy=t$　……①　とおくとき

$x^2+xy+y^2=3$　より　$(x+y)^2-xy=3$　よって　$s^2-t=3$

ゆえに　$\boldsymbol{t=s^2-3}$　……②

(2)　①より x，y は2次方程式　$X^2-sX+t=0$　の2解

実数条件より　$s^2-4t \geqq 0$

これに②を代入して　$s^2-4(s^2-3) \geqq 0$　　$s^2 \leqq 4$　　よって　$\boldsymbol{-2 \leqq s \leqq 2}$

(3)　①，②より

$k=x^2+y^2+x+y$

$=(x+y)^2-2xy+x+y$

$=s^2-2t+s$

$=s^2-2(s^2-3)+s=\boldsymbol{-s^2+s+6}$

(4)　$k=-\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$　$(-2 \leqq s \leqq 2)$

よって　k の最大値　$M=\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$　$\left(s=\dfrac{1}{2}\right)$　　最小値　$m=\mathbf{0}$　$(s=-2)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　総合問題(1)

等式　$x^2-xy+y^2=2$ を満たす実数 x，y について，次の問いに答えよ．

(1)　$p=x+y$，$q=xy$ とおくとき，$q=\dfrac{p^2-\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$　である．

(2)　p のとり得る値の範囲は　$-\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\leqq p\leqq\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$　である．

(3)　$2x+2y+3xy$ は p を用いて　$p^2+\boxed{\text{オ}}p-\boxed{\text{カ}}$ と表せる．よって

$2x+2y+3xy$ の最大値は $\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$，最小値は　$-\boxed{\text{コ}}$ である．

(1)　$p=x+y$，$q=xy$　とおくと

$x^2-xy+y^2=2$ より　$(x+y)^2-3xy=2$

よって　$p^2-3q=2$　　　したがって　$q=\dfrac{p^2-\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

(2)　$p=x+y$，$q=xy$ より，p，q は 2 次方程式

$t^2-pt+q=0$　すなわち　$t^2-pt+\dfrac{p^2-2}{3}=0$ の 2 解．

実数条件より　$p^2-4\cdot\dfrac{p^2-2}{3}\geqq 0$　　$p^2-8\leqq 0$　　よって　$-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}\leqq p\leqq 2\sqrt{2}$

(3)　$2x+2y+3xy=2(x+y)+3xy$

$=2p+3q$

$=2p+3\cdot\dfrac{p^2-2}{3}$

$=p^2+\mathbf{2}p-\mathbf{2}$

$=(p+1)^2-3$

$-2\sqrt{2}\leqq p\leqq 2\sqrt{2}$　であることより，$2x+2y+3xy$ は

$p=2\sqrt{2}$　$(q=2)$　のとき　最大値　$\mathbf{6+4\sqrt{2}}$

$p=-1$　$\left(q=-\dfrac{1}{3}\right)$　のとき　最小値　$\mathbf{-3}$　　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。